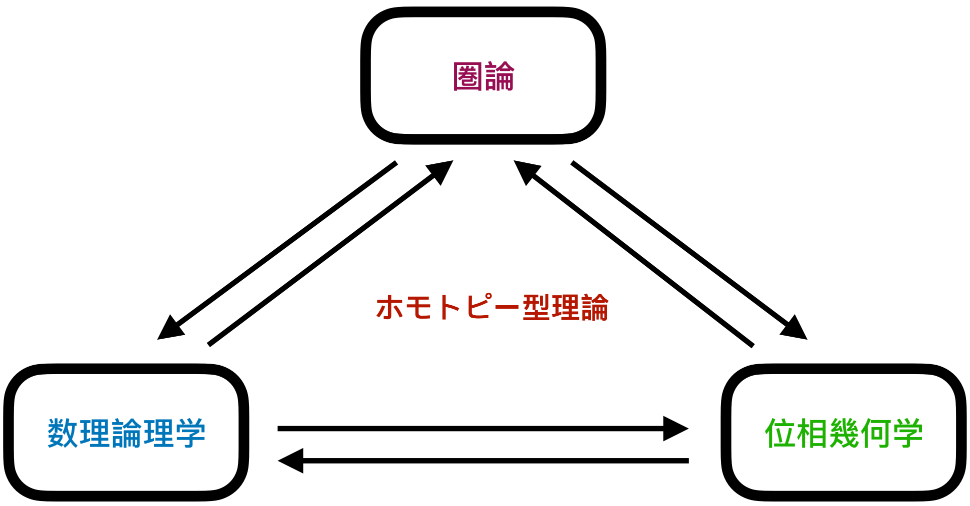
山田　倫大
ミネソタ大学
２０２１年　６月

# 船井情報科学振興財団　第３回ポスドク報告書

米国ミネソタ大学にポスドク研究員として勤めています、山田倫大です。アメリカでは対 COVID-19 のワクチン接種が急速に進められ、ここミネアポリスにも約１年ぶりに日常生活が戻ってきました。街のほとんどの店やレストランがマスクや対人距離に関する規制を撤回し、大学の運営も８月初旬より通常に戻る予定です。この日常生活の明るい変化と重なるように、私の研究においても進展がありました。本稿ではこの研究内容についてその背景と共に綴ります。

## 三位一体の研究




私の研究分野の概観図

予備知識として始めに私の研究の背景と概観を示したいと思います。私の研究は主に数理論理学（Mathematical Logic）・位相幾何学（Topolgoy）・圏論（Category Theory）及びこれらの分野の相互関連を対象としています。数理論理学は「数学の数学」とも呼ばれる様に、数学を構成する（数や図形などの）オブジェクトや（背理法や数学的帰納法などの）証明及び計算（不）可能性や数学の構文論と意味論[1]といった根源的・基礎的な概念を厳密に定義することで「数学を数学的に定式化」し、そこから数学それ自体及びその威力や限界を明らかにする分野です。数理論理学に於ける代表的な定理として「真である論理式だけを全て機械的に算出する万能な数学の形式化（構文論）は存在しない」ことを示した Kurt Gödel の不完全性定理が知られています。

位相幾何学とは「ゴム膜の幾何学」とも呼ばれる様に（断裂や接着を伴わない）連続的な変形に無関係（不変）な図形や空間の性質を対象とする幾何学（図形や空間に関する数学）です。例えば位相幾何学に於いて取っ手付きマグカップとドーナッツは同一視されます。何故ならば、粘土で取っ手付きマグカップの形を作った場合、これを断裂や接着を伴わずドーナッツの形に変

[1] 数学の構文論とは数学の形式的な言語と証明（共に記号的概念）を厳密に定めるものであり、意味論とは構文論に対応する（構文論の記号列が「意味する」）数学的概念を定めるものです。

形させることができるからです。何故この様な同一視を行うのかというと、位相幾何学の起源とされるケーニヒスベルクの七つの橋の問題の様な幾何学的問題に関して図形・空間の大きさや形の詳細は無関係であるからです。要するに、位相幾何学は本質的でない幾何学的情報を捨て去ることでこれらの問題に対して適度に抽象的で効果的な数学的枠組みを与えるのです。

圏論とはオブジェクト間の相互関係を表す射と呼ばれる概念に関する（抽象）代数学[2]です。オブジェクトと射はそれぞれ集合と関数の一般化と見なすことができるため、圏論は「（一般化された）関数の数学」とも呼ばれます。圏論は射の抽象性により非常に幅広い数学の諸概念に共通する構造や性質の「本質」を明らかにします。言い換えれば、圏論に於ける定理は非常に幅広い数学の分野に適用可能であり、これにより同一の論証を各分野ごとに繰り返す無駄を省くことができます。また、圏論は異なる分野間の相互関係を体系的に明らかにします。具体的には、集合・論理・位相空間といった概念はそれぞれの圏と呼ばれる代数的構造を成し、更に関手と呼ばれる「圏の間の射」は異なる圏の間の相互関係を表します。例えば、論理式の標準的な集合論による解釈は論理の成す圏から集合の成す圏への関手として定式化されます。

数学の数学的基礎（数理論理学）・射の代数（圏論）・ゴム膜の幾何（位相幾何学）、これら一見全く異なる様に見える分野の間には深い繋がりが存在します。例えば、圏論は数理論理学や位相幾何学に潜む代数的構造を明らかにします。[3]特に、数理論理学に於いて数学の形式化（構文論）の一つである型理論（Type Theory）と圏は一対一の関係にあります。つまり、各型理論に対応する圏が存在し、逆に各圏に対応する型理論が存在します。[4]しばしば「抽象ナンセンス」と揶揄される程に抽象的な圏論ですが、数理論理学や位相幾何学は圏論に直感的な具体例を与えることでその「正当性」を支え圏論的概念の発展を促し、逆に圏論は数理論理学や位相幾何学の諸概念を体系的に整理しその発展を促します。[5]また、本稿ではその詳細を省略しますが、フィールズ賞受賞者の Vladimir Voevodsky らによって数理論理学・位相幾何学・（高階）圏論の間に新しく非常に美しい繋がりが発見され、これを基にホモトピー型理論（Homotopy Type Theory）という分野が誕生しました。この様に、数理論理学・位相幾何学・圏論は互いに深く結び付いています。

私は元々数理論理学に興味がありました。というのも学部時代に一通り純粋数学の科目を学ぶ中で、特に数理論理学の哲学的・根源的・普遍的な性質に魅了されたからです。その中でとりわけ構成的数学というアプローチに傾倒しました。構成的数学とは「オブジェクトや証明は構成（計算）可能なものだけを認める」という考えに基づく数学の総称です。構成的数学が考案された２０世紀前半に於いてはこの制限は厳し過ぎると考えられていましたが、この制限の中でも古典的な数学的成果の大部分がより洗練された形で再現できることが次第に分かってきました。従

---

[2] 代数とは集合及びその集合の要素に関する操作と等式から成る概念です。例えば整数の集合 $\mathbb{Z}$ 及び加法 + と加法が満たす通常の等式（結合法則など）は群という代数的構造を成します。ここで述べたいことは、圏論の中心は射の集合及び射に関する操作と等式だという点です。

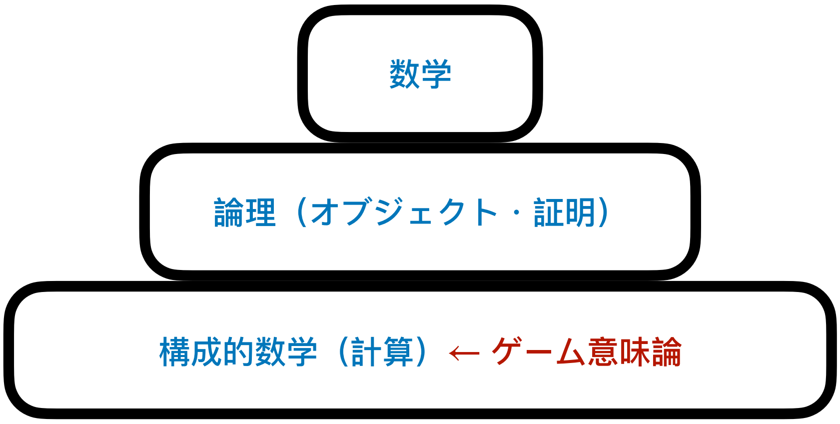
[3] 実際に圏論の起源は代数的位相幾何学と呼ばれる位相幾何学の一分野にあります。

[4] １９世紀までの数学の殆どは微分積分学など物理学を起源としましたが、２０世紀以降の数学の中には圏論など数理論理学・理論計算機科学と密接に関わりながら発展したものがあります。

[5] 数理論理学・位相幾何学それぞれに（少なくとも現時点で）圏論では捉えられない部分が存在します。もし圏論が万能な手法として全ての数学を表現できたら大変便利ですが、それは少し寂しい様にも思えます。この類似として、それぞれの国や文化に固有の機微や精神性はその母国語にしか表現できないため万能な言語は存在しない（すべきでない）点が挙げられる様に思います。

来私は数学でしばしば用いられる過度に抽象化・理想化されたオブジェクトや証明の「真実性」に疑問を持っていました。数学者によっては現実世界とは異なる数学の世界を肯定し「そこに数学的真実がある」と詩的に語りますが、私は「数学の基礎も数学的に定式化したい」という立場を取ります。この様な考えを持つ私が構成的数学に出会った時の衝撃は大きなものでした。何故ならば、構成的数学に於いては全てのオブジェクトや証明が計算[6]という形で「実在する」からです。私が構成的数学に惹かれる第一義的な理由はここにあります。更に言えば、数学に於ける証明とはある種の計算であるため、構成的数学の考え方は非常に自然で理に適っています。技術的にも、構成的数学は従来の古典的なアプローチでは扱うことのできない繊細な数学的構造・現象を捉えることができ、また計算という概念を通して理論計算機科学への応用も実現しています。

一方、従来の数学では計算という概念を満足に捉えることができず、この問題が純粋数学（意味論）としての構成的数学の発展のボトルネックとなっていました。故に、計算を十分に捉えることのできる新しい数学（意味論）を創造しこれを用いることで構成的数学を理想的な数学の基礎として確立できると考えました。私の博士論文はゲーム意味論（Game Semantics）[7]という枠組みを計算の数学的基礎へと洗練・発展させ、この考えを実現するものでした。




私の博士論文の概観図

このゲーム意味論的な論理・計算・構成的数学へのアプローチを研究する中で、圏論が大きな役割を果たしました。具体的には、あるゲーム意味論的概念の定義に悩んだ時に、綺麗な圏論的構造を持つ様な選択肢を選ぶと上手くいくということが幾度となくありました。始めは「抽象ナンセンス」という印象から興味の持てなかった圏論ですが、この研究を通して圏論の「証明の代数学」としての実用性と美しさに開眼し、今では純粋な圏論の研究も行なっています。また、博士課程在学中にホモトピー型理論に出会いました。ホモトピー型理論を通して私の数学的手法と位相幾何学との繋がりも視野に入りました。この様な経緯を経て、現在私はゲーム意味論とホモトピー型理論を軸として数理論理学・位相幾何学・圏論及びその相互関係を研究しています。より具体的な私の研究目標や課題については次回の報告書に譲りたいと思います。

[6] ここで言う計算とは純粋数学的な概念であり、コンピュータによる計算などとは異なります。

[7] ゲーム意味論は経済学に於けるゲーム理論とはその起源も研究内容も大きく異なります。ゲーム理論は現実世界の現象を近似する「数理モデル」であり、大別すると応用数学に属します。反対にゲーム意味論は数理論理学に属し、あくまで数学的概念を扱います。また、ゲーム理論の主眼は「如何に現実世界の現象を正確に分析するか」という点にありますが、ゲーム意味論はその数学的構造・性質や型理論・圏論など他の数学分野との相互関係を深く掘り下げます。

## 構成的数学の難題：量化子の計算的な解釈

私の研究の根幹を成す論文が長くて複雑なため、これをどうにかして短く簡約して出版しなければならないことを前回の報告書に書きました。その内容がゲーム意味論による構成的数学の基礎を確立する上で最も重要なステップに相当します。故に、この論文の出版は現在の私の最重要課題であり、今年３−５月の研究の中心を占めました。しかし、この論文の内容を簡潔に再構築する手法を考え付いたと思うと、ある箇所が上手くいかないことが分かり、その修正を行うと別の箇所が綻ぶという様に、進んだと思えば振り出しに戻る状況が３ヶ月程続きました。改めてこの論文が扱う問題の深さと繊細さを思い知ると同時に、自分の研究の根幹を成す論文が出版できずに終わる恐怖に取り憑かれました。出口の見えないトンネルを２ヶ月以上彷徨う中、５月初旬に新しいアイディアが浮かび、その結果９０ページだった論文を３７ページに簡約することに成功しました。これにより元の内容を簡約しただけでなく大幅に洗練させることができたため、この成果に非常に満足しています。最後まで諦めずに考え抜いた甲斐がありました。

以下、この論文の要点を簡単に解説したいと思います。この論文の内容は構成的数学の形式化（構文論）の一つであるマーティン・レフ型理論（Martin-Löf Type Theory）をゲーム意味論によって解釈する（捉える）というものです。これによりマーティン・レフ型理論が形式化する非常に広範囲の構成的数学をゲーム意味論によって純粋数学的に定式化できるため、この成果は私の研究に於いてとても重要です。また、先述したホモトピー型理論はマーティン・レフ型理論を拡張したものであり、私のホモトピー型理論に関する研究はこのマーティン・レフ型理論のゲーム意味論に基づいています。一方、マーティン・レフ型理論のゲーム意味論の実現は非常に困難なことが知られており、この問題は２５年以上未解決でした。この問題の難しさは量化子の計算的な解釈にあります。量化子とは「全ての〜」や「ある〜」といった概念を指します。数学の多くの分野において量化子は不可欠であり、実際に「全てのオブジェクト x について論理式 A(x) が成り立つ」や「A(x) が成り立つある x が存在する」といった言明が数学の中では頻繁に使用されます。マーティン・レフ型理論は量化子を形式化しているため、そのゲーム意味論は量化子の計算的な解釈を伴います。ここで、ゲーム意味論はマーティン・レフ型理論が形式化するオブジェクトや証明をある種の計算として解釈することで構成的数学の意味論を実現していることに注意して下さい。しかし、計算は刻一刻と変化し多くの場合永遠に止まらないプロセスです。例えば実数はその値を一桁ずつ出力する計算として考えることができますが、π などほとんどの実数の桁は無限に続くためその計算は永遠に終わりません。故に、量化子の「全ての x」や「ある x」の対象となる計算 x は多くの場合その全容が永遠に明かされず、確認できるのは常にその有限な部分情報のみです。更に、その部分情報は徐々にアップデートされます。この中で「量化子を解釈する計算をどう定式化するか」という問題に対する答えは全く明らかではありません。[8]この問題への適切な解はマーティン・レフ型理論の定める種々の代数的公理を満たさなければならず、また構成的数学の立場から見て概念的にも妥当であることが求められます。私の今回の論文はこの問題に非常に綺麗な解を与えました。興味のある方は講演スライドやプレプリントをご覧下さい。

末筆になりますが、船井情報科学振興財団の皆様のご支援に改めて感謝致します。今後とも一層の努力を重ね、研究と教育を通して世界に貢献して参ります。

[8] これは従来の静的・外延的な数学には現れない動的・内包的な数学的現象だと言えます。